بسمه تعالی

تاریخ امتحان: ۱۳۹۶/۱۰/۱۶

مدیریت آموزش و پرورش ناحیه چهار تبریز

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

دبیرستان پسرانه غیر دولتی مشکاة نور -دوره دوم

نام و نام خانوادگی: .... کلاس: **دوازدهم ریاضی ......** موضوع امتحان: **هندسه تحلیلی** نام دبیر: **علیزاده**

---

۱ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ و رابطه $A^2+\alpha A+\beta I=O$ برقرار باشد ، مقدار α,β را بیابید ؟

۲ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

در این صورت درستی تساوی $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ را بررسی کنید.

۳ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۳ \end{bmatrix}$ در اینصورت حاصل $\left|A^3\right|-2$ را بیابید .

۴ - بدون بسط با استفاده از ویژگی های دترمینان ثابت کنید .

$$\begin{vmatrix} a^۲ & b^۲ & c^۲ \\ a & b & c \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-c)$$

۵ - اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ نشان دهید ، $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

۶ - اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ \frac{۴}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$ ماتریس های A^2,A^3,A^{100},A^{201} را حساب کنید .

۷ - دستگاه زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید .

$$\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ -x+y=7 \end{cases}$$

۸ - معادله دایره ای را بنویسید که از نقطه $A(1,2)$ می گذرد و بر محور های مختصات مماس است .

۹ - مقدار m را طوری بیابید که معادله $x^2+y^2-2x+(m-1)y+5=0$ یک دایره باشد .

۱۰ - وضعیت نسبی دو دایره زیر را مشخص کنید .

$$C: x^2+y^2-4x+2y-4=0$$
$$C': x^2+y^2-8x-9=0$$

پاسخ نامه هندسه ۳ دی ماه ۹۷

۱)

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-7\\21&22\end{bmatrix}\qquad \alpha A=\alpha\begin{bmatrix}2&-1\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha&-\alpha\\3\alpha&5\alpha\end{bmatrix}\qquad \beta I=\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}$$

$$A^2+\alpha A+\beta I=\bar{O}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-7\\21&22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\alpha&-\alpha\\3\alpha&5\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}5\alpha+\beta=-22 \xrightarrow{\star} -35+\beta=-22\rightarrow \boxed{\beta=13}\\ 2\alpha+\beta=-1\end{cases}$$

$$3\alpha=-21\rightarrow\boxed{\alpha=-7}\star$$

---

۲)

$$A\times(B+C)=A\times\left(\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}\right)=\overbrace{\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}_{3\times2}}^{A}\times\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}_{2\times2}=\begin{bmatrix}5&10\\-3&-2\\5&0\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$(A\times B)+(A\times C)=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&5\\-1&1\\0&-5\end{bmatrix}_{3\times2}+\begin{bmatrix}0&5\\-2&-3\\5&5\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}5&10\\-3&-2\\5&0\end{bmatrix}_{3\times2}$$

نتیجه می‌گیریم: $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

---

۳)

$$A=\begin{bmatrix}5|A|&|A|\\5&4|A|^2\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\left(5|A|(4|A|^2)\right)-5|A|\rightarrow 20|A|^3-6|A|=0\Rightarrow|A|\times(20|A|^2-6)=0\Longrightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}|A|=0\rightarrow|A|^3-2=-2\\ |A|^2=\frac{6}{20}\rightarrow\begin{cases}|A|=\frac{\sqrt6}{\sqrt{20}}\Rightarrow|A|^3-2=\frac{\sqrt6-10}{\sqrt{20}}\\ |A|=-\frac{\sqrt6}{\sqrt{20}}\Rightarrow|A|^3-2=\frac{-\sqrt6-10}{\sqrt{20}}\end{cases}\end{cases}$$

---

۴)

$$\begin{vmatrix}a^2&b^2&c^2\\a&b&c\\1&1&1\end{vmatrix}\ \begin{matrix}-r_2+r_1\\-r_3+r_2\end{matrix}\begin{vmatrix}a^2-b^2&b^2-c^2&c^2\\a-b&b-c&c\\0&0&1\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}a+b&b+c&c^2\\1&1&c\\0&0&1\end{vmatrix}$$

ستون=۳

$$\xrightarrow{-r_2+r_1}(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}a-c&b+c&c^2\\0&1&c\\0&0&1\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(a-c)$$

---

۵)

$$AB=\begin{bmatrix}-1&1\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-2\\-8&4\end{bmatrix}\rightarrow(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}\begin{bmatrix}4&+2\\+8&-4\end{bmatrix}=\frac{1}{-32}\begin{bmatrix}4&2\\8&-4\end{bmatrix}\star$$

$$|AB|=\left(-4\times4-((-2)(-8))\right)=-16-16=-32\star$$

$$\Longrightarrow(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac18&-\frac1{16}\\-\frac14&+\frac18\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}4 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix}4 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$(-1\times 4-0)$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix}1 & -3\\ +2 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{-3}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$(2\times 1-(3\times(-2)))$

$$\xrightarrow{\otimes} \begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{-3}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & -\frac{1}{16}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

نتیجه : $(AB)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$

---

(6)

$$A^2 = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad A^3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$A^2 = I \xrightarrow{\text{به توان } 50} \boxed{A^{100} = I}$

$A^2 = I \xrightarrow{\text{به توان } 100} A^{200} = I \xrightarrow{\times A} A^{201} = AI \rightarrow \boxed{A^{201} = A}$

---

(7)

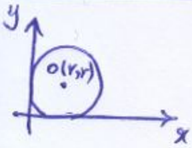
$$\begin{cases}2x + 3y = -2\\ -x + y = 7\end{cases} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\ 7\end{bmatrix}}_{B} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}1 & -3\\ +1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$(2-(-3))$

$$X = A^{-1}B \rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\ 7\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-23\\ 12\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-23}{5}\\ \frac{12}{5}\end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{-23}{5},\ y = \frac{12}{5}$$

---

(8)



$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \xrightarrow[\text{صدق کند}]{A(1,2)} (1-r)^2+(2-r)^2=r^2 \rightarrow 1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2$

$\rightarrow r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0 \rightarrow \begin{cases}r=1 \rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1\\ r=5 \rightarrow (x-5)^2+(y-5)^2=25\end{cases}$

---

(9)

$a^2+b^2-4c>0 \rightarrow (-2)^2+(m-1)^2-4(5)>0 \rightarrow (m-1)^2>16 \rightarrow \begin{cases}m-1>4 \rightarrow m>5\\ m-1<-4 \rightarrow m<-3\end{cases}$ جواب : $(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

---

(10)

$C: x^2+y^2-4x+2y-4=0 \rightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1=4 \rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9 \rightarrow \boxed{O(2,-1)\ ,\ r=3}$

$C': x^2+y^2-8x-9=0 \rightarrow (x-4)^2-16+y^2=9 \rightarrow (x-4)^2+y^2=25 \rightarrow \boxed{O'(4,0)\ ,\ r=5}$

$d=OO'=\sqrt{(4-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$|r-r'|<d<|r+r'| \rightarrow 5-3<\sqrt{5}<5+3 \rightarrow 2<\sqrt{5}<8$ دو دایره نسبت به هم متقاطع اند.